SOPRA UN ALGORITMO

PROPOSTO

PER ESPRIMERE GLI ALLINEAMENTI

E SULL'ORDINE O LA CLASSE

DEL LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI O DELLE RETTE
SOGGETTI AD UNA LEGGE DI ALLINEAMENTO

Sunto

DEL M. E. PROF. BELLAVITIS

Letto

nell' adunanza dell' I. R. Istituto Veneto
il dì 26 decembre 1854







VENEZIA
NEL PRIV. STAB. NAZ. DI G. ANTONELLI
1855



Se noi badassimo soltanto alla vastità della mente umana ed alla copia veramente maravigliosa d'oggetti differenti ch'essa può raccogliere e comprendere, sembrerebbe che i segni, con cui quegli oggetti si rappresentano, fossero inutili al raziocinio, e necessarii solamente per comunicare altrui le proprie idee. Ma la cosa procede ben diversamente, e chi ha alcun poco meditato sul magistero del pensiero, sa che le idee senza segno malamente si conservano, e che la nostra mente ben presto si stanca nel seguire una serie di ragionamenti, se un opportuno linguaggio non le porga quasi materialmente sott'occhio l'esercizio del raziocinio, ed i risultamenti col suo mezzo successivamente discoperti. Egli è appunto per un oggetto a prima giunta accessorio che l'algebra fece così immensi progressi, cioè per un sistema di segni, il quale permette di esporre in modo breve e preciso gli oggetti del ragionamento e le sue conclusioni.

Anche le relazioni puramente grafiche delle figure, cioè l'allineamento dei punti e l'intersecarsi delle rette, può dar occasione ad una segnatura, la quale additi con semplicità e precisione qualsiasi composizione di tali allineamenti od intersezioni. Una di tali segnature fu già proposta dal Carnot, ma parmi che essa perdesse la chiarezza se dovea

esprimere una costruzione alcun poco complicata; altra fu proposta dal Grassmann, geometra di Stettino *(J. Crelle,* XXXI, 1846; XXXVI, XLII, XLIV). — I ragionamenti e le conclusioni intorno agli allineamenti sono per certo facilissimi, ma quando devono ripetersi molte volte, la mente si stanca, nè scorge la conchiusione, cui giova pervenire. Credo perciò utile di fissare l'attenzione su alcuni canoni o leggi d'algoritmo, mediante i quali si può quasi materialmente trarre le conseguenze delle stabilite premesse. Quel metodo di segnatura e questi canoni formano l'oggetto della presente nota, nella quale osservo eziandio l'errore del Grassmann nel credere che le formule da lui proposte fossero abbastanza generali per rappresentare qualunque curva del terzo grado, e riduco a formula il metodo insegnato per tale oggetto dall'illustre Chasles.

Diremo *elemento* un punto od una retta, questa considerandosi indefinita, senza badare cioè alla sua lunghezza. Sono elementi *omogenei* due punti, o due rette; sono *eterogenei* un punto ed una retta. Due elementi omogenei possono essere *coincidenti,* e due elementi eterogenei si diranno *congruenti,* quando il punto appartiene alla retta, ossia la retta passa pel punto. Un elemento può esprimersi o con una sola lettera, o con una *formula* o combinazione di lettere; nel primo caso, i punti s'indicheranno sempre colle lettere maiuscole, e le rette colle minuscole.

Come due lettere maiuscole AB, poste l'una accanto dell'altra, indicano la retta che passa pei due punti A, B; così pure l'unione di due lettere minuscole *ab* indicherà il punto d'intersezione delle due rette *a*, *b*. Simile significato si attribuirà ad ogni formula composta dall'unione di due elementi omogenei; così, per esempio, *a*(BC) esprime il punto d'intersezione della retta espressa da *a* e di quel-

l'altra espressa da BC. — Ogni formula risulta da successive unioni di elementi omogenei; così la formula AB*c*D*e* esprime che la retta AB taglia la retta *c* in un punto, il quale unito col punto D dà una retta, la quale taglia la retta *e* nel punto che viene espresso dalla formula; questa ha quindi lo stesso significato come se fosse scritta {[(AB)*c*]D}*e*, e per brevità si ommettono le parentesi, le quali s' intendono cominciare sempre dal principio ed estendersi ognora ad un elemento di più. Si vede che ogni formula è necessariamente costituita da due elementi omogenei, cui seguono altri elementi, in guisa che due consecutivi sono sempre eterogenei.

Ogni elemento di una formula può essere espresso, anzichè da un' unica lettera, da una formula; in tal caso, bisogna necessariamente chiudere questa formula tra parentesi. Così AB(CD)E(*fg*H) esprime che il punto A è unito con B da una retta, che si taglia colla CD in un punto, il quale si unisce ad E con una retta, che finalmente si taglia colla retta *fg*H (questa ottiensi a sua volta tagliando la *f* colla *g* in un punto, che poscia si unisce con H). —Se in una formula stacchiamo col pensiero l' ultimo, o i due ultimi, o i tre ultimi, ec., elementi, essa può considerarsi come composta di due, di tre, di quattro, ec. elementi. Così la precedente formula (che esprime un punto) possiamo considerarla come composta o dalle due rette AB(CD)E, *fg*H, o dai tre elementi AB(CD), E, *fg*H, o dai quattro AB, CD, E, *fg*H, o dai cinque A, B, CD, E, *fg*H. Ogni altra separazione non sarebbe lecita, come non è nemmeno permesso di alterare la disposizione degli elementi.

La coincidenza di due elementi si esprimerà col segno ||; così AB(CD)||M significa che il punto indicato dalla formula AB(CD) è quello stesso segnato con M.

Così AB||MN significherà che le rette AB, MN coincidono insieme, cioè l' una cade sull' altra, senza però che sia necessario che le rette sieno uguali; giacchè nella teoria degli allineamenti nulla si bada alla lunghezza delle rette.

Una formula si pone ||0, quando essa include la successione di due elementi omogenei coincidenti; intenderemo or ora perchè questa indeterminazione dell'oggetto espresso dalla formula s' indichi collo zero. — Così nella suddetta ipotesi di AB(CD)||M sarà AB(CD)M||0. — La formula AB*c*D||0 esprime o che sono coincidenti i due punti A, B, o che coincidono le rette AB,*c*, o che finalmente AB*c*||D. — Perciò, quando nell' esame di una formula (cioè nel considerare l' unione di A con B, l' intersezione di AB con *c*, l'unione di AB*c* con D, ec.) noi giungeremo a combinare due elementi coincidenti, ne conchiuderemo senza più che la formula è ||0; e tale sarà pure se sia nullo uno degli elementi che successivamente si considerano. Così se sia *cd*E||0, sarà anche AB(*cd*E) F||0 qualunque sia F. Pertanto stabiliremo il *canone* 1.° *Una formula è nulla se ciò che considerasi come primo termine è uguale al suo successivo, ed è pur nulla se tale è un suo elemento.*

Canone 2.° *In ogni formula possono tra loro permutarsi quelli, che se ne considerano come i due primi elementi; ed a loro, purchè non sieno coincidenti, può sempre sostituirsi un nuovo elemento congruente con entrambi.* Ciò risulta dal modo con cui si devono combinare quei due primi elementi, che sono sempre omogenei, e dal significato della loro unione. Così la AB*c*D*e* è identica con ciascuna delle BA*c*D*e*, *c*(AB)D*e*, D(AB*c*)*e*, *e*(AB*c*D); ed alle parti della formula possono farsi subire altre simili trasposizioni; così la formula può anche scriversi D[*c*(AB)]*e*,

$e[c(AB)D]$. Questo canone servirà a diminuire il numero delle parentesi, il che rende più facile e diretta la costruzione della formula; così invece di $A\{BC[deF(GH)J]\}$ può scriversi $BC[deF(GH)J]A$, oppure $deF(GH)J(BC)A$. — In quanto alla seconda parte del teorema, è facile persuadersi che se AC è congruente con B, come lo è per certo con A, invece di ABd può scriversi ACd; purchè per altro non fosse $A||B$, il che darebbe $ABd||0$.

Canone 3.° Una formula, purchè non sia nulla, se considerata come di tre elementi, abbia il terzo elemento congruente con uno dei due primi, si riduce a questo solo elemento. Cioè, se c sia congruente ad A, si ha $ABc||A$; infatti, se il punto A appartiene alla retta c, le rette ABc si tagliano nel punto A. Similmente, se c sia congruente con B, si ha $ABc||B$. — Esempii nei quali la congruenza dei due elementi primo e terzo apparisce dal modo stesso con cui essi sono indicati; α) perchè il terzo elemento è formato da due elementi, dei quali uno è identico col primo elemento $ab(ca)||a$, $ABcD[e(ABc)]||ABc$; oppure β) perchè il primo elemento è formato di due elementi, dei quali uno è identico col terzo elemento $ABcA||A$, $ABcDeD||ABcD$, $ABcDe[c(AB)]||ABcD$; oppure γ) perchè un elemento è congruente col suo successivo $ABcD(DE)||D$, dove i tre elementi della formula sono ABc, D, DE; $ABc(de)e||de$.

La congruenza di due elementi eterogenei s' indicherà ponendoli l' uno accanto all' altro separati da un punto, e ponendo questa specie di prodotto $||0$. Così $A.b||0$ significa che il punto A appartiene alla retta b; $ABcD.EFg||0$ significa che la retta $ABcD$ passa pel punto EFg. — I due elementi eterogenei della congruenza si diranno i suoi *fattori*. — *Canone 4.° Una con-*

gruenza è identicamente soddisfatta se un fattore è coincidente con uno dei due elementi, dei quali si considera formato l' altro fattore. Così AB.A||0, ABc.D(ABc)||0 ABc(de).ABc||0.

Se da uno dei due fattori di una congruenza si stacca il suo ultimo elemento, si hanno o tre punti in linea retta o tre rette concorrenti insieme. Così la ABcD.EF*g*||0 significa che ABc, D, EF*g* sono tre punti in linea retta, e che ABcD, EF, *g* sono tre rette concorrenti insieme. Tre elementi omogenei, che sono in tali relazioni, possono dirsi tra loro *congruenti*, e scriversi anche ABc.D.EF*g*||0. Del resto, noi supporremo che le congruenze sieno sempre ridotte a due fattori eterogenei; il che si ottiene unendo insieme due dei tre fattori, per esempio ABc(EF*g*).D||0. Quando una formula è nulla, essa dipende dall' intersezione di due rette coincidenti, o dall' unione di due punti coincidenti, perciò rappresenta un punto indeterminato di una retta, od una retta indeterminata passante per un dato punto; quindi: *Canone 5.° Una congruenza considerasi come soddisfatta anche quando un suo fattore è nullo.*

Canone 6.° In ogni congruenza l' ultimo termine di un fattore può trasportarsi come ultimo nell' altro fattore, e tal trasporto può ripetersi più volte. Cioè, la congruenza AB.C||0 è identica alla A.CB||0; infatti, se la retta AB passa pel punto C, il punto A appartiene alla retta CB. — Così pure, la ABcD.E||0 è identica con ciascuna delle ABc.ED||0 , AB.EDc||0 , A.EDcB||0.

Con queste trasposizioni, e mediante il canone 5.°, possono semplificarsi parecchie congruenze. Così, se sia ABc.*f*||0 la congruenza ABcD*e*.*f*||0 , che si trasforma in ABcD.*fe*||0 , e pel canone 2.° in ABcD.*ef*||0 , poi in ABcD*f*.*e*||0, equivale alla congruenza ABc.*e*||0,

oppure alla formula nulla ABcDf||0; infatti il 3.° canone porta che se ABc.f||0 sia ABcDf||ABe, purchè non sia ABcDf||0. — Se e.D||0, la ABcDe.f||0 equivale (3.° γ) alla congruenza D.f0, purchè non sia ABcDe||0. Siccome la congruenza può anche (canone 6.°) scriversi ABc.feD||0, così (canone 3.°) se e.||D0, essa equivale eziandio alla ABc.e||0, purchè non sia feD||0. — Altro esempio, la congruenza A(bc).cd||0 trasformata (6.°) nella A.cd(bc)||0 equivale (3.°) alla A.c||0, purchè non sia cd(bc)||0; e trasformata (2.° 6.°) nella A(bc)c.d||0 equivale alla bc.d||0, purchè non sia A(bc)c||0.

Canone 7.° ***Ogni coincidenza equivale a due congruenze fra uno dei suoi membri ed i due elementi dell'altro membro.*** Così la coincidenza ABcDe||fg equivale alle due congruenze ABcD.fg||0, e.fg||0; ed eziandio alle due ABcDe.f||0, ABcDe.g||0.

Quando una congruenza contiene un elemento variabile essa rappresenta un luogo geometrico; intendendosi con ciò l'insieme di tutti i punti variabili, oppure l'inviluppo di tutte le rette variabili, secondo che l'elemento variabile è un punto od una retta. Nel primo caso l'ordine, e nel secondo la classe del luogo geometrico, eguaglia il numero delle volte che l'elemento variabile è contenuto nella congruenza. Il Grassmann crede aver trovate alcune congruenze, le quali esprimano la costruzione di ogni curva del terzo ordine mediante allineamenti; a me sembra che tutte le costruzioni da lui proposte manchino della necessaria generalità, e credo che la prima soluzione di tal problema sia quella data dall'illustre geometra Chasles (*Compte rendu*, 30 *mai* 1853).

Cominciamo dal considerare, p. es., la congruenza

ABxD.EFg||0, che contenendo una sola volta la retta variabile x, deve rappresentare un luogo geometrico della 1.ª classe. Essa può scriversi (6.° e 2.° canone) x(AB). EFgD||0 , e x.EFgD(AB)||0 , ed esprime che la retta variabile x passa pel punto EFgD(AB), che ne costituisce il luogo geometrico.

Se fosse proposta la congruenza XAbC.X||0 , ossia XAb.XC||0, si vedrebbe che le tre rette XA, b, XC non possono concorrere insieme se non in quanto il punto X appartenga ad una delle due rette b, AC; perciò il luogo geometrico rappresentato dalla congruenza è il sistema di due rette. Possiamo quindi stabilire il *canone* 8.° *Se un fattore di una congruenza sia composto di quattro elementi, dei quali il primo sia identico coll' altro fattore, questo sarà congruente o al terzo elemento, oppure alla combinazione del secondo col quarto.*

La congruenza XAbCdE.X||0 esprime un triangolo variabile col vertice X, i cui lati ruotano intorno ai loro punti A, C, E, mentre gli altri due vertici scorrono sulle rette fisse b, d. Siccome la congruenza contiene due volte il punto variabile X, così essa rappresenta un luogo geometrico del secondo ordine. (Nel mio sistema per la classificazione delle curve algebriche a tali luoghi geometrici, che sono le sezioni coniche, do il nome di *ditome*, in quanto che una retta non può tagliarle che in due punti; sono eziandio *diattomene*, perchè da un punto non si può guidar loro che due toccanti). La *ditoma* rappresentata dalla congruenza passa pei due punti A, E; poichè quando X||A la congruenza è soddisfatta pel canone 5.°, e lo è pure pei canoni 6.° e 5.° quando X||E. — Si noti pure che alla congruenza può darsi (6.°) la forma XEdCbA.X||0, sicchè quanto dicesi di AbCdE, può ripetersi di EdCbA. —

La congruenza è anche soddisfatta da X||*bd*||L; infatti, pel 3.° canone è *bd*A*b*||*bd*, poi *bd*C*d*||*bd*, e finalmente (pel 4.°) è *bd*E.*bd*||0. Giacchè la ditoma taglia la retta *b* nel punto *bd*, cerchiamo l'altro punto d'intersezione; cioè, supponiamo X congruente a *b*. In tal caso sarà (3.°) XA*b*||X (purchè non fosse XA*b*||0, il che è impossibile, perchè A non è congruente alla *b*), poscia la XC*d*E.X||0 mostra (canone 8.°) che X dev'essere congruente o alla *d* o alla CE. Quindi la ditoma passa eziandio pel punto X||C||E*b*||M. Per ugual ragione comprende il punto X||AC*d*||N. — Comunque sieno dati i cinque punti A, E, L, M, N, possono col loro mezzo determinarsi i cinque elementi della congruenza; giacchè *b*||LM, *d*||LN, C||EM(AN): e siccome una ditoma è pienamente determinata da cinque dei suoi punti, così la congruenza rappresenta ogni ditoma. È facile conoscere che essa esprime il teorema del Pascal sull'esagono ANLMEX, i cui lati opposti s'incontrano nei tre punti C, XE*d*, XA*b*, che, a motivo della congruenza (XA*b*)C.XE*d*||0, sono in linea retta.

Consideriamo adesso la congruenza XA*b*C*d*X.XH*b*F*e*||0, che è una di quelle che, secondo il Grassmann, dovrebbe rappresentare tutte le *tritome* (ossia curve del terzo ordine): essa esprime due triangoli variabili, le cui basi cadono sopra una stessa retta ed hanno un vertice comune X, gli altri due vertici appartenenti alle basi scorrono sulle rette *d*, *e*, i quattro lati ruotano intorno ai punti A, C, H, F, ed i due vertici fuori delle basi scorrono su due rette fisse *b*, *g* che si suppongono coincidere insieme. — La tritoma passa (3.°) pei punti A, H. Per trovarne altri punti, osserviamo che il primo fattore della congruenza si annulla se XA*b*C*d*||X, cioè se abbiano luogo le due contingenze *d*.X||0, XA*b*C.X||0, e perciò (8.°) dev'esser XH*b*d||M,

oppure $X\|ACd\|P$. In simil modo, ponendo (6.°) $XHbFe\|X$, troveremo i punti $X\|be\|N$, $X\|HFe\|Q$. — Cerchiamo il terzo punto, oltre i due M, N; nel quale la curva taglia la b; cioè supponiamo $X.b\|0$; avremo (3.°) $XAb\|X$, poscia $XCdX\|XC$ (giacchè ora supponiamo che non sia $X.d\|0$,* e quindi non possa essere $XCdX\|0$); è eziandio $XHbFe\|XFe$; così la congruenza è ridotta a $XC.XFe\|0$, ossia (2.°, 6.°) a $C.XFeX\|0$, il cui secondo fattore sarà pel 3.° canone $\|XF$ (giacchè ora facciamo astrazione del caso di $XFeX\|0$, che darebbe $X.e\|0$): dunque abbiamo $C.XF\|0$, ossia $CF.X\|0$, ed è così trovato il nuovo punto della curva $X\|CFb\|L$. Cerchiamo il terzo punto, oltre i due M, P, nel quale la curva taglia la d, cioè supponiamo $X.d\|0$. Avremo (3.°) $(XAbC)dX\|d$ (giacchè ora facciamo astrazione dal caso di $XAbCdX\|0$), perciò la congruenza diventa $d.XHbFe\|0$, ossia (6.°) $deFbH.X\|0$, e così abbiamo trovato il punto $X\|deFbHd\|R$. — Similmente, nella e si trova il punto $X\|edCbAe\|S$.

Dall'essere nove i punti $A, H, M, N, P, Q, L, R, S$ della curva, il Grassmann crede poterne dedurre che la congruenza rappresenti una qualunque *tritoma*, la quale è appunto determinata da nove punti. Ma è facile vedere che se si prendano ad arbitrio i sette elementi A, H, P, Q, R, S, b, vengono ad essere determinati anche $M\|PRb$, $N\|QSb$, ($d\|PR$, $e\|NQ$), poscia si trova $F\|de(RHb)(HQ)$, $C\|de(SAb)(AP)$, e finalmente è determinato anche $L\|CFb$. Così la congruenza dipendendo da sette elementi, non è abbastanza generale nemmeno per rappresentare le *tritome tetrattomene* (cioè curve del 3.° ordine e della 4.ª classe), le quali essendo *algebrico-razionali* sono determinate da otto soli punti.

Col nostro algoritmo non è difficile determinare alcuni altri punti della curva. Così se cerchiamo il terzo punto che trovasi sulla retta AH, porremo X.AH||0, sicchè (2.°) XA||AH, XH||AH, e la congruenza diventerà AH*b*C*d*X. AH*b*F*e*||0, ossia (6.° 2.°) X.AH*b*F*e*(AH*b*C*d*)||0; perciò (7.°) X||AH*b*F*e*(AH*b*C*d*)(AH). — Per avere il terzo punto sulla retta AP, porremo X.AC||0, sicchè (2.°) XA||AC, ed avremo (3.°) AC*b*C||AC, poi AC*d*X||AC; la congruenza si riduce ad AC.XH*b*F*e*||0, da cui (6.°) AC*e*F*b*H.X||0, e perciò (7.°) X||AC*e*F*b*H(AC). Pel terzo punto, sulla retta AM porremo X.*bd*A||0, ed avremo XA||*bd*A, poscia (3.°) *bd*A*b*||*bd*, *bd*C*d*||*bd*, e *bd*X||*bd*A; la congruenza diventa quindi *bd*A.XH*b*F*e*||0, che dà X||*bd*A*e*F*b*H(*bd*A). — Similmente si troverebbero i terzi punti sulle HQ, HN.

Analoghe conclusioni possono farsi rispetto alla congruenza XA*a*(XB*b*).XC*c*||0, la quale indica che nel punto variabile X concorrono tre rette, che, girando intorno ai loro punti A, B, C, tagliano rispettivamente tre rette fisse *a*, *b*, *c* in tre punti situati in linea retta. La congruenza è bensì soddisfatta da ciascuno dei nove punti A, B, C, *bc*||L, *ca*||M, *ab*||N, BC*a*||P, CA*b*||Q, AB*c*||R; ma evidentemente i tre ultimi sono conseguenza necessaria dei sei primi. — I tre punti che stanno sulla *c* si trovano ponendo X.*c*||0, il che dà (3.°) XC*c*||X, sicchè la congruenza diventa XA*a*(XB*b*).X||0, a cui si applica il can. 8.°, e se ne deduce che X.*a*||0, oppure X.A(XB*b*)||0, ossia X.XB*b*A||0; da cui nuovamente (8.°) si deduce X.*b*||0, oppure X.BA||0; in questa maniera si trovarono i tre punti *ca*||M, *cb*||L, *c*(BA)||R. — Può anche trovarsi il terzo punto della retta AM; infatti, se X.*ca*A||0 è (2.° 3.°) XA*a*||*ca*A*a*||*ca*, perciò (6.°) XB*b*.XC*c*(*ac*)||0,

ossia (3.°) XB*b*.*c*||0, dunque X||*bc*B(AM)||BL(AM). In egual maniera si trovano gli altri due punti CL(AN), CM(BN).

Un quadrilatero, i cui lati ed una diagonale girano intorno ai punti B, D, E, G, A, mentre i vertici, che a quella diagonale non appartengono, scorrono su due rette fisse *c*, *f*, descrive con uno degli estremi di quella diagonale una tritoma rappresentata XB*c*D(XA).XG*f*E||0. Gli elementi XB*c*D, XA, XG*f*E non possono annullarsi se non che per X||B, A, G, e questi saranno tre punti della curva. — Se poniamo X.*c*||0 abbiamo (3.°) XB*c*||X, poscia (3.°) XD(XA) o sarà nullo, il che avverrà quando X.AD||0, oppure (3.°) si ridurrà ad X, e la congruenza X.XG*f*E||0 darà (8.°) o X.*f*||0, oppure X.GE||0; dunque appartengono alla *tritoma* anche i punti AD*c*||M, *cf*||L.GE*c*||P; e similmente anche i AE*f*||N, BD*f*||Q. Questi sette punti A, B, G, M, N, P, Q sono sufficienti a determinare i sette elementi della congruenza *c*||MP, *f*||NQ, D||AM(BQ), E||AN(GP). — Si possono trovare anche i terzi punti che appartengono alle rette BD, AD, AB, BG, ec.; essi sono BD(GE)||I, DE*f*G(AD)||R, DE*c*B(AE)||S, AB*c*E*f*G(AB)||U, AG*f*D*c*B(AG)||V, BG*f*E(BG*c*D)A(BG)||T.

In tutte le costruzioni di tritome indicate dalle precedenti congruenze, essendo il punto X l'intersezione di tre rette, esso non potrebbe determinarsi direttamente, bensì bisognerebbe tirare ad arbitrio una delle rette, poscia tagliarla colla conica, luogo dell'intersezione delle altre due rette: invece tutti i punti X si determinano con soli allineamenti, quando sono sottoposti alla congruenza XA*b*C*d*E(AX). XH*g*F||0, la quale esprime due triangoli, aventi le basi sopra una stessa retta che ruota intorno al punto A, nel

mentre i lati ruotano intorno a C, E, F, H; i vertici scorrono sulle *d*, *g*, e i vertici alle basi, due coincidono insieme, uno scorre sulla *b*, ed uno è il punto generatore X. — La curva rappresentata dalla congruenza passa per A, H; e siccome mutando (AX) in (A′X) essa passerebbe anche per A′, così si vede che A n'è un punto doppio. La tangente *y* nel punto A è data dalla congruenza *yb*C*d*E*y*.AH*g*F||0, che posto AH*g*F||*f*, esprime la *diattomena* (cioè la conica considerata come luogo geometrico, ossia inviluppo delle rette *y*), che tocca le cinque rette *b*, *f*, CE, *df*C, *bd*E: se a questa *diattomena* si potranno tirare da A due tangenti, esse saranno le tangenti nel punto doppio; se tali tangenti saranno impossibili, il punto A sarà un punto *isolato* della curva proposta. Questa appartiene per conseguenza ad uno dei due generi delle *tritome tetrattomene*, qualificati dall'avere un punto doppio od un punto isolato, ed ai quali appartengono il *Folium* ed il *Tricratere puntato*. — Fra gl'infiniti punti della curva, è più semplice la determinazione di quello che sta sulla retta AF, lo si trova espresso dalla formula AF*g*. Nel caso particolare che sia *g*||*d*, sono semplicemente determinati anche i punti AC*d*, *bd*.

Veniamo finalmente ad esporre sotto forma di congruenza, la costruzione data dal Chasles per la più generale *tritoma*, determinata da nove punti affatto arbitrarii. — Vedemmo che se dai due punti fissi A, E partono due fasci di raggi formanti ciò che io dico due *stelle collineari*, il luogo delle intersezioni dei raggi corrispondenti è una conica. Ora ai raggi passanti per E si sostituiscano altrettante coniche, le quali abbiano in E quei raggi per tangenti, ed inoltre passino pei tre punti fissi I, K, L; il Chasles dimostra (e ce lo dimostrerà anche la congruenza che troveremo) che il luogo delle intersezioni di quelle coniche coi raggi

corrispondenti partenti da A, non può essere incontrato da una retta che in soli tre punti, e che perciò esso è una *tritoma*, la quale passa pei cinque punti E, I, K, L, A. Se vogliasi ch' essa passi pei nove punti E, I, K, L, M, N, P, Q, R, il Chasles determina da prima il decimo punto A, mediante le seguenti considerazioni. Immaginate le quattro coniche che comprendono, oltre i punti E, I, K, L, uno dei quattro M, N, P, Q, il luogo del punto A, pel quale i quattro raggi AM, AN, AP, AQ formano una stella collineare con quella formata dalle quattro tangenti alle suddette coniche nel loro punto comune E, è una conica passante pei quattro punti M, N, P, Q; mutando Q in R si ha una seconda conica passante pei M, N, P, R: l'unica intersezione A di queste due coniche (che hanno già i tre punti comuni M, N, P) determina il decimo punto cercato. Dopo di che la tritoma si costruisce nel modo sopraindicato, che noi esprimeremo, mediante l'algoritmo, che forma l'oggetto di questa nota.

Sia AX uno dei raggi della stella A, ed ET il corrispondente raggio della stella E, perlochè la corrispondente conica EIKL avrà la tangente ET; ogni punto X di tal conica si trova espresso da XI(LE)[IK(ET)](LK)E.X||0. D'altronde, perchè le stelle dei raggi AX, ET sieno collineari, bisogna che il luogo delle loro intersezioni AX(ET)||T sia una conica passante pei A, E, che noi possiamo rappresentare colla congruenza TA*b*C*d*E.T||0, e siccome AX||AT, così è (6.°) XA*b*C*d*.ET||0, ed ET||XA*b*C*d*E; sostituendo, abbiamo per rappresentare la curva che passa pei dati nove punti la congruenza XI(LE)[XA*b*C*d*E (IK)](LK)E.X||0, alla quale possiamo dare la forma XA*b*C*d*E*f*(XI*g*).XE*h*||0 essendo *f*.I||0, *g*.E||0. La congruenza contiene tre sole volte il punto variabile X, e quindi rappresenta la tritoma. Il numero degli elementi